Nous avons le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
v \in V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] & W \ni T(v) \arrow[d, "\psi"] \\
{[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n} \arrow[r, dashed, "?"] & \mathbb{R}^m \ni [T(v)]_{\mathcal{B}'}
\end{tikzcd}$$

La flèche en pointillets correspond à une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Elle a donc une matrice qui lui est canoniquement associée, A. Autrement dit, A est la matrice de taille $m \times n$ telle que

$$[T(v)]_{\mathcal{B}'} = A[v]_{\mathcal{B}}$$

Nous avons vu que les colonnes de A sont les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, par l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ qui lui est associée.

Comme par construction $b_i = 0 \cdot b_1 + \cdots + 1 \cdot b_i + \cdots + 0 \cdot b_n$ on a $[b_i]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \overrightarrow{e_i}$.

On peut donc restreindre le graphique précédent aux b_i :

$$\begin{tikzcd}
b_i \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] & T(b_i) \arrow[d, "\psi"] \\
\overrightarrow{e_i} \arrow[r, dashed, "?"] & {[T(b_i)]_{\mathcal{B}'}}
\end{tikzcd}$$

L'image de $\overrightarrow{e_i}$ est donc $[T(b_i)]_{\mathcal{B}'}$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Nous avons donc motivé la définition suivante.

Définition 4.72 *Matrice associée à une application linéaire*

Soit $T : V \to W$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de V et $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_m)$ une base de W.
La matrice de taille $m \times n$ dont la i-ème colonne est le vecteur de coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de l'image par T du i-ème vecteur de la base $\mathcal{B}$ est appelée *matrice associée à l'application linéaire T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ de V et $\mathcal{B}'$ de W*, notée $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$:

$$A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(b_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(b_2)]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [T(b_n)]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix}$$

Nous avons ainsi :

$$[T(v)]_{\mathcal{B}'} = A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Méthode 4.73 *Méthode pour calculer $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$*

Méthode pour calculer $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

1. Calculer les images des n vecteurs de la base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de V :
$$T(b_1), \quad T(b_2), \quad \dots, \quad T(b_n)$$
2. Exprimer ces n vecteurs comme combinaisons linéaires des m vecteurs de la base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \dots, w_m)$:
$$\begin{aligned} T(b_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ T(b_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

La matrice $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ a comme colonnes les vecteurs de coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ des vecteurs $T(b_1), T(b_2), \dots, T(b_n)$:
$$A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(b_1)]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [T(b_n)]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Remarques 4.4.0.74. *1. Si l'on prend les bases canoniques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de V et W, on va noter A_T la matrice associée plutôt que $A_T^{\mathcal{E}'\mathcal{E}}$ (pour simplifier la notation).*

2. Si les espaces vectoriels de départ et d'arrivée sont égaux : $V = W$, en général on va prendre la même base pour les deux espaces : $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ et on va noter $A_T^{\mathcal{B}}$ la matrice associée plutôt que $A_T^{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ (pour simplifier la notation).

Exemples. 1. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire
$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y, x - z) \end{aligned}$$
par rapport aux bases $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^2$. On a :
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc

$$A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire

$$T : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (2x+3y-4z, 5x-6y, 7x-8z) \end{array}$$

par rapport aux bases $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^3$ dans l'espace de départ et $\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^3$ dans l'espace d'arrivée. On a :

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-6) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-8) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-8) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donc

$$A_T^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \\ 7 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$

3. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire

$$T : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (2x+3y-4z, 5x-6y, 7x-8z) \end{array}$$

par rapport à la base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^3$ (même base pour l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On a :

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-6) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-8) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donc

$$A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

4. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire

$$\begin{array}{rll} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto (y-z, 3x+2y-3z, 2x+2y-3z) \end{array}$$

par rapport à la base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^3$ (même base pour l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On a :

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donc

$$A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire

$$\begin{array}{rll} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto (y-z, 3x+2y-3z, 2x+2y-3z) \end{array}$$

par rapport à la base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^3$ (même base pour l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On a :

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

donc

$$A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que pour ce choix particulier de base, la matrice $A_T^{\mathcal{B}}$ est une matrice diagonale.

6. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire $T: \begin{array}{ll} \mathbb{P}_2 & \longrightarrow \mathbb{P}_2 \\ p & \longmapsto p' \end{array}$ (dérivée) par rapport à la base canonique $\mathcal{E} = \left(1, x, x^2\right)$ de $\mathbb{P}_2$. On a :

$$\begin{aligned} T(1) &= 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x) &= x' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x^2) &= (x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \end{aligned}$$

donc

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T(1)]_{\mathcal{E}} \quad [T(x)]_{\mathcal{E}} \quad [T(x^2)]_{\mathcal{E}}$$

Remarques 4.4.0.75. *Si $p(x) = a + bx + cx^2$ est un polynôme quelconque, les règles de dérivation nous donnent tout de suite :*

$$p'(x) = b + 2cx. \quad \textit{Nous avons donc :}$$

$$T(a + bx + cx^2) = b + 2cx$$

La matrice A_T nous permet de retrouver le même résultat à l'aide d'une multiplication matricielle. En effet,

$$[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_T[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 0 \end{bmatrix} = [p']_{\mathcal{E}}$$

d'où :

$$[p']_{\mathcal{E}} = A_T[p]_{\mathcal{E}}$$

7. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire $T: \begin{array}{ll} \mathbb{P}_2 & \longrightarrow \mathbb{P}_2 \\ p & \longmapsto p' \end{array}$ par rapport à la base $\mathcal{B} = \left(1, 1 + x, 1 + x + x^2\right)$ de $\mathbb{P}_2$. On a :

$$\begin{aligned} T(1) &= 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (1 + x + x^2) \\ T(1 + x) &= (1 + x)' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (1 + x + x^2) \\ T(1 + x + x^2) &= (1 + x + x^2)' = 1 + 2x = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (1 + x + x^2) \end{aligned}$$

donc

$$A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

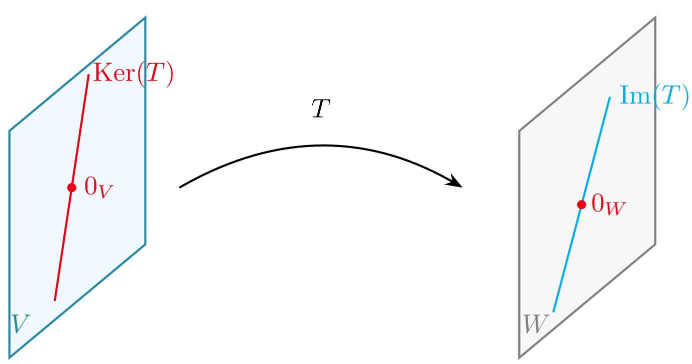
8. Soit $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2.
Déterminer la matrice de l'application linéaire $\begin{array}{rccl} \mathrm{Tr}: & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \longmapsto & a+d \end{array}$ (trace de la matrice),
par rapport aux bases canoniques de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. On a :
$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + 0 = 1 = 1 \cdot 1$$
$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 = 0 = 0 \cdot 1$$
$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 = 0 = 0 \cdot 1$$
$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 + 1 = 1 = 1 \cdot 1$$
donc
$$A_{\mathrm{Tr}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.6.3 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 4.76 *Noyau et image*

Soit V et W deux espaces vectoriels et soit $T : V \to W$ une application linéaire.

1. Le *noyau* de T, noté $\mathrm{Ker}(T)$ est le sous-ensemble de V défini par
$$\mathrm{Ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\} \subset V$$
2. L'*image* de T, notée $\mathrm{Im}(T)$ est le sous-ensemble de W défini par
$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W \mid \text{il existe } v \in V \text{ tel que } T(v) = w\} \subset W$$



Théorème 4.77 Ker(T) *sev de* V

$\mathrm{Ker}(T)$ est un sous-espace vectoriel de V.

Démonstration. 1. $0_V \in \mathrm{Ker}(T)$ car $T(0_V) = 0_W$.
Soit $u, v \in \mathrm{Ker}(T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Soit u et v tel que $T(u) = 0_W$ et $T(v) = 0_W$.
Alors $T(u+v) = T(u) + T(v) = 0_W + 0_W = 0_W$. Donc on a bien $u + v \in \mathrm{Ker}(T)$.
3. $T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda 0_W = 0_W$. Donc $\lambda u \in \mathrm{Ker}(T)$.

□

Théorème 4.78 *$\mathrm{Im}(T)$ sev de W*

$\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W.

Démonstration. 1. $0_W \in \mathrm{Im}(T)$ car $0_V \in V$ vérifie $T(0_V) = 0_W$.
Soit $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Par hypothèse, il existe $v_1, v_2 \in V$ tels que $w_1 = T(v_1)$ et $w_2 = T(v_2)$.
Donc $w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$. Donc on a bien $w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}(T)$.
3. $\lambda w_1 = \lambda T(v_1) = T(\lambda v_1)$. Donc $\lambda w_1 \in \mathrm{Im}(T)$.

□

Remarques 4.4.0.79. *1. Nous avons* $0_V \in \mathrm{Ker}(T)$ *et* $0_W \in \mathrm{Im}(T)$.

2. Pour caractériser $\mathrm{Ker}(T)$ *et* $\mathrm{Im}(T)$ *complètement, il suffit de donner leur dimension et une base.*
De plus, $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \leqslant \dim(V)$ *et* $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leqslant \dim(W)$

Exemples

Application nulle Soit $T : V \to W$ définie par $T(v) = 0_W$ pour tout $v \in V$.
On a $\mathrm{Ker}(T) = V$ et $\mathrm{Im}(T) = \{0_W\}$.

Application identité Soit $T : V \to V$ définie par $T(v) = v$ pour tout $v \in V$.
On a $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$ et $\mathrm{Im}(T) = V$.

Projection canonique Soit $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{array}$.

On a $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$

et $\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R} \right\}$

Donc $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Remarquons que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$.

Soit $\begin{array}{rcl} T: & \mathbb{P}_2 & \longrightarrow \mathbb{P}_2 \\ & p & \longmapsto T(p) \end{array}$ où $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ et $T(p(t)) = (a_0 + a_1) + a_1 t + a_2 t^2$.

Par exemple : $T(1+t) = 2 + t$ et $T(1 - t - t^2) = (1-1) - t - t^2 = -t - t^2$.

1. $\mathrm{Ker}(T)$:
   On cherche les $p \in \mathbb{P}_2$ tels que $T(p) = 0$. Autrement dit, $(a_0 + a_1) + a_1 t + a_2 t^2 = 0$.
   Donc
   $$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$
   Donc $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ et $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.
2. $\mathrm{Im}(T)$:
   Soit $b \in \mathbb{P}_2$ un polynôme donné par $b(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$.
   À résoudre $T(p) = b$.
   $$\begin{aligned} & (a_0 + a_1) + a_1 t + a_2 t^2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_0 + a_1 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & a_0 = b_0 - b_1,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2. \end{aligned}$$
   En fonction de b_0, b_1, b_2, on pourra toujours trouver a_0, a_1, a_2 et avoir $T(p) = b$.
   Donc $\forall b \in \mathbb{P}_2$, $\exists p \in \mathbb{P}_2$ tel que $T(p) = b$, et $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{P}_2$.

Lien entre le noyau et l'image d'une application linéaire, et celui de ses matrices associées

Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une base de V ($\dim V = n$), et soit $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ une base de W ($\dim W = m$).

Soit $A = A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ la matrice de T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ de V et $\mathcal{B}'$ de W.

Nous avons l'équivalence :

$$\left.\begin{array}{c} T(v) = w \\ \text{avec } v \in V \text{ et } w \in W \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} A[v]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{B}'} \\ \text{avec } [v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n \text{ et } [w]_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^m \end{array}\right.$$

d'où la suite d'équivalences suivantes

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Ker}(T) \subset V &\Leftrightarrow T(v) = 0_W \\ &\Leftrightarrow A[v]_{\mathcal{B}} = [0_W]_{\mathcal{B}'} \\ &\Leftrightarrow [v]_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Ker}(A) \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \in \mathrm{Im}(T) \subset W &\Leftrightarrow \exists\, v \in V,\ T(v) = w \\ &\Leftrightarrow \exists\, [v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n,\ A[v]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{B}'} \\ &\Leftrightarrow [w]_{\mathcal{B}'} \in \mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

En résumé,

$$v \in \mathrm{Ker}(T) \subset V \Leftrightarrow [v]_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Ker}(A) \subset \mathbb{R}^n$$
$$w \in \mathrm{Im}(T) \subset W \Leftrightarrow [w]_{\mathcal{B}'} \in \mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$$

Donc,

$$\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Ker}(A))$$
$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(A))$$

Définition 4.80 *Rang*

Soit $T : V \to W$ une application linéaire.
On définit le *rang de* T, noté $\mathrm{rang}(T)$ par

$$\mathrm{rang}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T))$$

Remarque 4.4.0.81. *On peut montrer que*

$$\mathrm{rang}(T) = \mathrm{rang}\left(A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right)$$

pour tout choix de base $\mathcal{B}$ de V et $\mathcal{B}'$ de W.

Théorème 4.82 *Théorème du rang*

Soit $T : V \to W$ une application linéaire. On a :

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))\\ &= \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \mathrm{rang}(T)\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de V et $\mathcal{B}'$ une base de W.
Soit $A = A_T^{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice de T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ de V et $\mathcal{B}'$ de W.
Soit $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ le système homogène associé.

Nous avons vu que :

$$(\text{nb. de variables libres}) = (\text{nb. d'inconnues}) - (\text{nb. de pivots})$$
$$\text{donc, } \dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = n - \dim\big(\mathrm{Im}(A)\big)$$
$$\text{donc, } \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \dim V - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$$

d'où le résultat. □

Exemples. 1. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $T : \begin{array}{ccc}\mathbb{P}_2 & \longrightarrow & \mathbb{P}_2\\ p & \longmapsto & p'\end{array}$ (dérivée).

Par définition, $\mathrm{Ker}(T) = \{p \in \mathbb{P}_2 \,|\, T(p) = 0\} = \{p \in \mathbb{P}_2 : p' = 0\}$. On s'attend à trouver $\mathrm{Ker}(T) = \mathbb{P}_0$, d'après les outils d'analyse.
D'autre part, $\mathrm{Im}(T) = \{q \in \mathbb{P}_2 \,|\, \text{il existe } p \in \mathbb{P}_2 \text{ tel que } p' = q\}$. On s'attend à trouver $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{P}_1$, d'après les outils d'analyse.

Rappel. La matrice de $T(p) = p'$ par rapport à la base canonique $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $\mathrm{rang}(A) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 3 - 2 = 1 \\ \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 \end{cases}$

Système homogène associé à A :

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Donc, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Comme $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]_{\mathcal{E}}$, nous trouvons

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{P}_0.$$

D'autre part, on a $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Comme $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]_{\mathcal{E}}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [x]_{\mathcal{E}}$, nous trouvons

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Vect}(1, x) = \mathbb{P}_1$$

2. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire trace $\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr} : & M_{2,2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \longmapsto a + d \end{array}$

   Rappel. La matrice de Tr par rapport aux bases canoniques de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ est

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   On a $\mathrm{rang}(A) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = 4 - 1 = 3 \\ \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})) = 1 \end{cases}$

Système homogène associé à A : $x_1 + x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -u \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = u \end{cases}$, avec $s, t, u \in \mathbb{R}$.

Solution générale : $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $s, t, u \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

On a $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{E}}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{E}}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{E}}$.

De même on trouve $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right]_{\mathcal{E}}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\left[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\right]_{\mathcal{E}}$.

Par conséquent,

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

D'autre part, comme $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})) = 1$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) \subset \mathbb{R}$ on a $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$.

4.6.4 Changement de base

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ deux bases de V.

Soit I_d l'application identité définie par : $I_d : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ v & \longmapsto & v \end{array}$.

L'application identité envoie un vecteur de V sur ce même vecteur, mais dans l'espace de départ, le vecteur v est exprimé dans la base $\mathcal{B}$, alors que dans l'espace d'arrivée, il est exprimé dans la base $\mathcal{C}$. On a donc $I_d : [v]_{\mathcal{B}} \mapsto [v]_{\mathcal{C}}$.

Définition 4.83 *Matrice de passage*

Cette application linéaire a une matrice qui lui est canoniquement associée, $A_{\mathrm{id}}^{\mathcal{CB}}$. On notera plutôt cette matrice $\mathcal{P}^{\mathcal{CB}}$ et on l'appelle *matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$.*

Remarque 4.4.0.84. ***Interprétation géométrique des matrices de passage***

La matrice de passage $\mathcal{P}^{\mathcal{CB}}$ peut être vue comme un « dictionnaire » qui traduit les coordonnées d'un vecteur exprimées dans la base $\mathcal{B}$ vers ses coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

Géométriquement, dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, un changement de base correspond à :

— *Une rotation du système de coordonnées (si les bases sont orthonormées)*

— *Une déformation incluant éventuellement des étirements ou contractions selon certaines directions*
— *Une combinaison des deux effets précédents*

Le vecteur lui-même ne change pas dans l'espace, seule sa description (ses coordonnées) change selon le « point de vue » (la base) choisi.

Par construction,

$$\mathcal{P}^{\mathcal{CB}} = A^{\mathcal{CB}}_{\text{id}} = \begin{bmatrix}[b_1]_{\mathcal{C}} & [b_2]_{\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{C}}\end{bmatrix},$$

c'est à dire que pour construire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ *vers la base* $\mathcal{C}$, on peut exprimer chacun des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$.

De plus,

$$[v]_{\mathcal{C}} = \mathcal{P}^{\mathcal{CB}}[v]_{\mathcal{B}}$$

Exemple. Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)$ et $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

Nous avons :

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}^{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}^{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}$

Propriété 4.85

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases de l'espace vectoriel V alors :

$$\mathcal{P}^{\mathcal{BC}} = \left(\mathcal{P}^{\mathcal{CB}}\right)^{-1}$$

Nous pouvons donc obtenir $\mathcal{P}^{\mathcal{BC}}$ à l'aide de l'algorithme :

$$\left[\mathcal{P}^{\mathcal{CB}} \mid I_n\right] \sim \left[I_n \mid \mathcal{P}^{\mathcal{BC}}\right]$$

Reprenons les bases de l'exemple précédent. On a :

$$\left[\mathcal{P}^{\mathcal{CB}} \mid I_2\right] = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix} = \left[I_2 \mid \mathcal{P}^{\mathcal{BC}}\right]$$

Remarque 4.4.0.86. *Lorsque $V = \mathbb{R}^n$, les bases $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{b_1}, \dots, \overrightarrow{b_n}\right)$ et $\mathcal{C} = (\overrightarrow{c_1}, \dots, \overrightarrow{c_n})$ peuvent être représentées sous forme de matrices dans la base canonique :*

$$B = \begin{bmatrix} \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{b_2} & \cdots & \overrightarrow{b_n} \end{bmatrix} \quad et \quad C = \begin{bmatrix} \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{c_2} & \cdots & \overrightarrow{c_n} \end{bmatrix}.$$

Par définition de la matrice de passage $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, les colonnes de $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base $\mathcal{C}$:

$$\overrightarrow{b_i} = \beta_{1i}\overrightarrow{c_1} + \cdots + \beta_{ni}\overrightarrow{c_n} \quad \Longleftrightarrow \quad [\overrightarrow{b_i}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \beta_{1i} \\ \vdots \\ \beta_{ni} \end{bmatrix}.$$

Sous forme matricielle, cela s'écrit :

$$B = C\,\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}.$$

Pour déterminer $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, il suffit donc de résoudre cette équation où l'inconnue est $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$. Autrement dit, on échelonne la matrice augmentée

$$\left[\overrightarrow{c_1}\,\overrightarrow{c_2}\,\cdots\,\overrightarrow{c_n} \mid \overrightarrow{b_1}\,\overrightarrow{b_2}\,\cdots\,\overrightarrow{b_n}\right] \sim \left[I_n \mid \mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}\right].$$

Enfin, si la base d'arrivée est la base canonique $\mathcal{E} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$, alors pour tout i, $[\overrightarrow{b_i}]_{\mathcal{E}} = \overrightarrow{b_i}$, d'où immédiatement :

$$\mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{b_2} & \cdots & \overrightarrow{b_n} \end{bmatrix}.$$

Exemple. Considérons les deux bases de $\mathbb{R}^3$:

— Base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

— Base $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ (base canonique)

Étape 1 : Construction de la matrice de passage $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$

Puisque $\mathcal{C}$ est la base canonique, les coordonnées d'un vecteur dans $\mathcal{C}$ sont simplement ses composantes. Donc :

$$\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

où les colonnes sont directement les vecteurs de $\mathcal{B}$.

Étape 2 : Calcul de la matrice inverse $\mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$

Utilisons l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$
\begin{aligned}
\left[\mathcal{P}^{\mathcal{CB}} \mid I_3\right] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\overset{L_2 \leftarrow -L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\overset{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Donc $\mathcal{P}^{\mathcal{BC}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Étape 3 : Application du changement de base

Soit le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ exprimé dans la base canonique $\mathcal{C}$.

Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$
\begin{aligned}
[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{B}} &= \mathcal{P}^{\mathcal{BC}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{C}} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3+2-1 \\ 3-2+1 \\ -3+2+1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vérification : $2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Propriété 4.87

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont trois bases de l'espace vectoriel V alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{D}$ peut se calculer comme suit :

$$\mathcal{P}^{\mathcal{DB}} = \mathcal{P}^{\mathcal{DC}}\mathcal{P}^{\mathcal{CB}} \quad \text{(multiplication matricielle)}$$

ou $\mathcal{P}^{\mathcal{DB}} = \left(\mathcal{P}^{\mathcal{CD}}\right)^{-1}\mathcal{P}^{\mathcal{CB}}$, ou $\mathcal{P}^{\mathcal{DB}} = \mathcal{P}^{\mathcal{DC}}\left(\mathcal{P}^{\mathcal{BC}}\right)^{-1}$

Les formules précédentes nous donnent une manière alternative pour calculer $\mathcal{P}^{\mathcal{CB}}$: $\mathcal{P}^{\mathcal{CB}} = \left(\mathcal{P}^{\mathcal{EC}}\right)^{-1}\mathcal{P}^{\mathcal{EB}}$, où comme avant $\mathcal{E}$ est la base canonique de V.

Exemple. Soit $V = \mathbb{R}^2$. On définit trois bases :

$$\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right), \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right), \qquad \mathcal{D} = \left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right).$$

1. Matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$

$$\mathcal{P}^{\mathcal{EB}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix},$$

2. Matrice de passage de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{E}$

$$\mathcal{P}^{\mathcal{ED}} = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}, \qquad \mathcal{P}^{\mathcal{DE}} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}.$$

3. Donc

$$\mathcal{P}^{\mathcal{DB}} = \mathcal{P}^{\mathcal{DE}}\,\mathcal{P}^{\mathcal{EB}} = (\mathcal{P}^{\mathcal{ED}})^{-1}\,\mathcal{P}^{\mathcal{EB}}.$$

On a :

$$\mathcal{P}^{\mathcal{DB}} = \mathcal{P}^{\mathcal{DE}}\,\mathcal{P}^{\mathcal{EB}} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & -3\end{bmatrix}.$$

Matrices d'application linéaire exprimées dans différentes bases

Propriété 4.88

Soit $T : V \to V$ une application linéaire, $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ deux bases de V. Alors :

$$A_T^{\mathcal{C}} = \mathcal{P}^{\mathcal{CB}}A_T^{\mathcal{B}}\mathcal{P}^{\mathcal{BC}}$$

Formulations équivalentes :

$$A_T^{\mathcal{C}} = \mathcal{P}^{\mathcal{CB}}A_T^{\mathcal{B}}\left(\mathcal{P}^{\mathcal{CB}}\right)^{-1}$$
$$A_T^{\mathcal{C}} = \left(\mathcal{P}^{\mathcal{BC}}\right)^{-1}A_T^{\mathcal{B}}\mathcal{P}^{\mathcal{BC}}$$

Démonstration. Nous avons le schéma suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \ni [v]_{\mathcal{B}} \arrow[r, "A_T^{\mathcal{B}}"] & A_T^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{R}^n \ni [v]_{\mathcal{C}} \arrow[u, "\mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}}"] \arrow[r, "A_T^{\mathcal{C}}"] & A_T^{\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

□

Remarque 4.4.0.89. *Cette proposition nous donne une manière alternative de calculer*

$$A_T^{\mathcal{C}} = \left[[T(c_1)]_{\mathcal{C}} \ [T(c_2)]_{\mathcal{C}} \ \cdots \ [T(c_n)]_{\mathcal{C}}\right]$$

lorsque $A_T^{\mathcal{B}} = \left[[T(b_1)]_{\mathcal{B}} \ [T(b_2)]_{\mathcal{B}} \ \cdots \ [T(b_n)]_{\mathcal{B}}\right]$ *et* $\mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ *(ou* $\mathcal{P}^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$*) sont connues.*

Définition 4.90 *Matrices semblables*

Soit A et A' deux matrices carrées de taille $n \times n$.
On dit que les matrices A et A' sont *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que

$$A' = PAP^{-1}$$

Les matrices $A_T^{\mathcal{C}}$ et $A_T^{\mathcal{B}}$ sont semblables car on a

$$A_T^{\mathcal{C}} = \mathcal{P} A_T^{\mathcal{B}} \mathcal{P}^{-1} \quad \text{avec } \mathcal{P} = \mathcal{P}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$$

Exemple. Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de matrice $A_T^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$.

— Matrices de passage :

$$\mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \left(\mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}}\right)^{-1} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

— Changement de base :

$$A_T^{\mathcal{B}} = \left(\mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}}\right)^{-1} A_T^{\mathcal{E}} \mathcal{P}^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Remarque importante 4.91

Importance pratique des changements de base
Les changements de base sont fondamentaux en algèbre linéaire pour plusieurs raisons :

1. **Simplification des calculs :** Certains problèmes deviennent beaucoup plus simples dans une base bien choisie.
2. **Résolution de systèmes différentiels :** En physique et en ingénierie, le choix d'une base adaptée peut transformer un système d'équations différentielles couplées en équations indépendantes.
3. **Préparation à la diagonalisation :** Comme nous le verrons au chapitre suivant, trouver une base dans laquelle une matrice devient diagonale simplifie considérablement les calculs de puissances de matrices et l'étude des applications linéaires.
4. **Analyse de données :** En statistiques et apprentissage automatique, les changements de base (comme l'analyse en composantes principales) permettent d'identifier les directions de variance maximale dans les données.

Le concept de matrices semblables, introduit ci-dessus, capture précisément l'idée que deux matrices peuvent représenter la même application linéaire vue dans des bases différentes. Cette notion sera centrale pour la diagonalisation des matrices.

Chapitre 5 : Valeurs propres et vecteurs propres

5.1 Introduction et motivation

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié les applications linéaires $T : V \to W$ et leur représentation matricielle. Nous allons maintenant nous concentrer sur un cas particulier fondamental : les applications linéaires d'un espace vers lui-même, c'est-à-dire $T : V \to V$. Nous avons vu que si V est de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}$, alors il existe une matrice A associée à T et $\mathcal{B}$. Par conséquent, nous pouvons restreindre ce chapitre à l'étude des applications linéaires $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Si nous appliquons cette matrice à différents vecteurs de $\mathbb{R}^2$, nous observons des comportements variés :

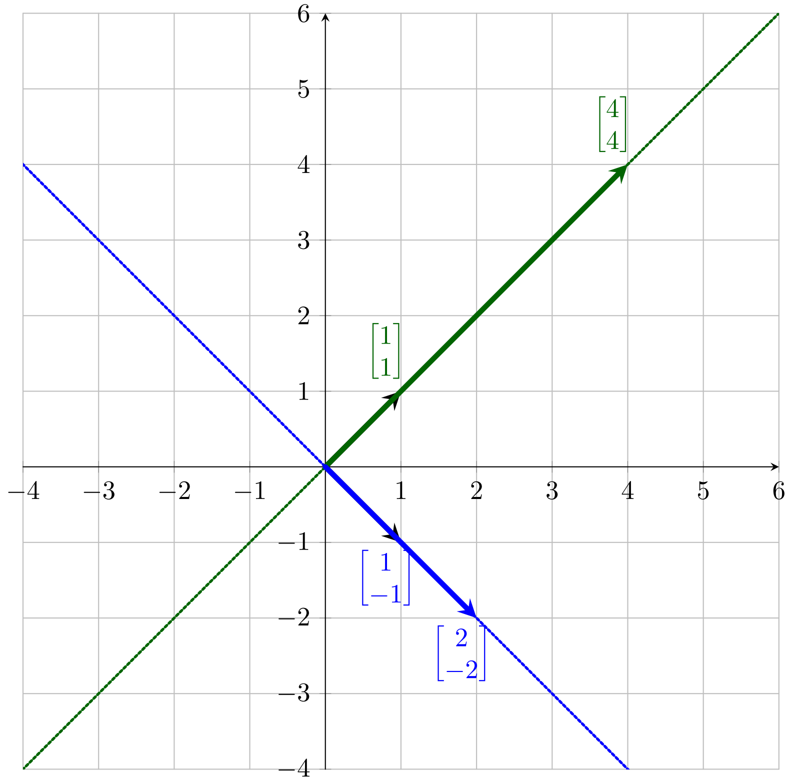
$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Remarquons que le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a un comportement particulier : il est simplement multiplié par 4. De même :

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, par linéarité, tous les vecteurs de la droite engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont colinéaires à leur image, avec un coefficient 4. Et tous les vecteurs de la droite engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sont colinéaires à leur image, avec un coefficient 2.

Ces vecteurs spéciaux, qui restent sur la même droite après transformation, et par extension ces deux droites spéciales, qui restent inchangées après transformation, jouent un rôle fondamental en algèbre linéaire et ont de nombreuses applications pratiques.



5.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.1 *Vecteur propre et valeur propre*

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.
Un vecteur non nul $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est appelé *vecteur propre* de A s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Le scalaire λ est alors appelé la *valeur propre* de A associée au vecteur propre $\vec{v}$.

Remarques 5.5.0.2.

1. *Le vecteur nul $\vec{0}$ vérifie toujours $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ pour tout λ. C'est pourquoi on exige que $\vec{v} \neq \vec{0}$ dans la définition.*
2. *Géométriquement, un vecteur propre est un vecteur dont la direction est préservée par la transformation (il peut être dilaté, contracté ou inversé).*
3. *Si $\vec{v}$ est un vecteur propre associé à λ, alors tout multiple non nul $c\vec{v}$ est aussi un vecteur propre associé à la même valeur propre λ.*

Exemples.

1. Vérifions que $\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur propre de $A = \begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$.

$$A\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+2 \\ 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6\overrightarrow{v}$$

Donc $\overrightarrow{v}$ est bien un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 6$.
$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ est aussi vecteur propre, associé à la valeur propre 1.

2. Pour la matrice identité $\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tout vecteur non nul est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

Détermination des valeurs propres

Pour trouver les valeurs propres d'une matrice, nous devons résoudre l'équation $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

Théorème 5.3 *Caractérisation des valeurs propres*

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Le scalaire λ est une valeur propre de A si et seulement si :

$$(A - \lambda\mathbb{I}_n)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

admet une solution non triviale $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

Ceci est équivalent à dire que la matrice $(A - \lambda\mathbb{I}_n)$ n'est pas inversible.

Démonstration. L'équation $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$ peut se réécrire :

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{v} &= \lambda\overrightarrow{v} \\ \Leftrightarrow A\overrightarrow{v} - \lambda\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow A\overrightarrow{v} - \lambda\mathbb{I}_n\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow (A - \lambda\mathbb{I}_n)\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Pour que cette équation admette une solution $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, il faut et il suffit que le système homogène associé à $(A - \lambda\mathbb{I}_n)$ ait une infinité de solutions, c'est-à-dire que $(A - \lambda\mathbb{I}_n)$ ne soit pas inversible (d'après le théorème 2.23). □

Corollaire 5.4

λ est une valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda\mathbb{I}_n) = 0$.

Exemples. 1. Trouvons les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Nous devons résoudre $\det(A - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$:

$$A - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_2) = (2-\lambda)(-\lambda) - 3(1) = -2\lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Résolvons $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$.

2. Pour $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\det(B - \lambda \mathbb{I}_2) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2$$

$$= 4 - 5\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

3. Pour une matrice 3×3 : $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Le polynôme caractéristique se calcule par développement selon la deuxième colonne (qui contient deux zéros) :

$$\det(C - \lambda \mathbb{I}_3) = (3-\lambda) \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$
$$= (3-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = -(3-\lambda)^2(\lambda - 1)$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

Définition 5.5 *Polynôme caractéristique et multiplicité algébrique*

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

— Le *polynôme caractéristique* de A, noté $p_A(\lambda)$, est défini par :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_n)$$

C'est un polynôme de degré n en λ.

— La *multiplicité algébrique* d'une valeur propre λ, notée $m_a(\lambda)$, est sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique.

Exemple. Pour $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

En développant selon la troisième colonne :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (5-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 4] \\ &= (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5) \\ &= -(5-\lambda)^2(\lambda-1) \end{aligned}$$

Donc $\lambda_1 = 1$ avec $m_a(1) = 1$ et $\lambda_2 = 5$ avec $m_a(5) = 2$.

Remarques 5.5.0.6.
1. *Les valeurs propres de A sont exactement les racines du polynôme caractéristique.*
2. *Le polynôme caractéristique peut avoir des racines complexes non réelles (qui apparaissent par paires conjuguées). Dans ce cas, la matrice a aussi des valeurs propres complexes, mais nous n'aborderons pas cela en détails dans ce cours. Par exemple, la matrice de rotation* $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *a pour polynôme caractéristique $\lambda^2 + 1$, dont les racines sont $\pm i$.*

Définition 5.7 *Trace d'une matrice*

La *trace* d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$ de taille $n \times n$, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est la somme des éléments de sa diagonale :

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemples.
1. $\mathrm{Tr} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 2 + 4 + (-3) = 3$
2. Pour une matrice 2×2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A)$$

3. Pour une matrice 3×3, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$:

Le polynôme caractéristique est :

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{bmatrix}$$

En développant complètement, on obtient :

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + (a+e+i)\lambda^2 - (ae - db + ai - gc + ei - hf)\lambda + \det(A)$$

On constate que le coefficient de λ^2 est :

$$a + e + i = \mathrm{Tr}(A)$$

De même, le terme constant (obtenu en posant $\lambda = 0$) est $\det(A)$.
Ainsi, pour une matrice 3×3 :

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \mathrm{Tr}(A)\lambda^2 - \sigma_2\lambda + \det(A)$$

où $\sigma_2 = \det \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & c \\ g & i \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix}$ est la somme des mineurs principaux 2×2.

Théorème 5.8 *Valeurs propres et inversibilité*

Soit A une matrice carrée. Alors :

1. 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.
2. Si A est inversible et λ est valeur propre de A, alors $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1}.
3. Si λ est valeur propre de A, alors λ^k est valeur propre de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Si λ est valeur propre de A, alors λ est valeur propre de A^T.

Démonstration.

1. 0 est valeur propre $\Leftrightarrow \det(A - 0 \cdot \mathbb{I}_n) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ n'est pas inversible.
2. Si $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ et $\lambda \neq 0$, alors :

$$\overrightarrow{v} = A^{-1}(A\overrightarrow{v}) = A^{-1}(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda A^{-1}\overrightarrow{v}$$

   Donc $A^{-1}\overrightarrow{v} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{v}$.

3. Si $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$, alors $A^2\overrightarrow{v} = A(A\overrightarrow{v}) = A(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda(A\overrightarrow{v}) = \lambda^2\overrightarrow{v}$.

   Par récurrence, $A^k\overrightarrow{v} = \lambda^k\overrightarrow{v}$.

4. $\det(A^T - \lambda\mathbb{I}_n) = \det((A - \lambda\mathbb{I}_n)^T) = \det(A - \lambda\mathbb{I}_n)$.

□

Théorème 5.9 *Valeurs propres d'une matrice triangulaire*

Si A est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont les éléments de sa diagonale.

Exemples. Pour $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, les valeurs propres sont $3, -1, 2, 4$.

5.2.1 Détermination des vecteurs propres

Une fois les valeurs propres trouvées, nous pouvons déterminer les vecteurs propres associés.

Définition 5.10 *Espace propre et multiplicité géométrique*

Soit λ une valeur propre de la matrice A.

— L'*espace propre* associé à λ, noté E_λ, est l'ensemble de tous les vecteurs propres associés à λ, ainsi que le vecteur nul :

$$E_\lambda = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n | A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda\mathbb{I}_n)$$

— La *multiplicité géométrique* de λ, notée $m_g(\lambda)$, est la dimension de l'espace propre E_λ.

Remarques 5.5.0.11. *E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (c'est le noyau de la matrice $A-\lambda\mathbb{I}_n$). Sa dimension est au moins 1 puisque λ est valeur propre, donc $1 \leq m_g(\lambda)$.*

Exemples. 1. Pour $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ avec $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$:

Pour $\lambda_1 = 3$:

$$A - 3\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = x_2$, donc $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ et $m_g(3) = 1$.

Pour $\lambda_2 = -1$:

$$A + \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_2 = -3x_1$, donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$ et $m_g(-1) = 1$.

2. Pour $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ avec $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$:

Pour $\lambda_1 = 2$:

$$B - 2\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = x_2$, donc $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Pour $\lambda_2 = 3$:

$$B - 3\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = 2x_2$, donc $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

3. Pour $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ avec $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$:

   Pour $\lambda_1 = 1$:

$$C - \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Solution : $x_1 = -x_3$ et $x_2 = 0$, donc $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ et $m_g(1) = 1$.

   Pour $\lambda_2 = 3$:

$$C - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Solution : $x_1 = x_3$ et x_2 libre, donc $E_3 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ et $m_g(3) = 2$.

Théorème 5.12 $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

Pour toute valeur propre λ : $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Démonstration. Admis. □

Théorème 5.13 *Indépendance linéaire des vecteurs propres*

Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.

Démonstration. Procédons par récurrence sur le nombre de vecteurs propres.

Un seul vecteur propre non nul est linéairement indépendant.

Supposons que k vecteurs propres $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ soient linéairement indépendants.

Soit $\overrightarrow{v}_{k+1}$ un vecteur propre associé à $\lambda_{k+1} \neq \lambda_i$ pour tout $i \leq k$.

Supposons qu'il existe $c_1, \ldots, c_{k+1}$ tels que :

$$c_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_k \overrightarrow{v}_k + c_{k+1} \overrightarrow{v}_{k+1} = \overrightarrow{0} \quad (*)$$

En appliquant A :

$$c_1 \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_k \lambda_k \overrightarrow{v}_k + c_{k+1} \lambda_{k+1} \overrightarrow{v}_{k+1} = \overrightarrow{0} \quad (**)$$

En calculant $(**) - \lambda_{k+1}(*)$:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) \overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \overrightarrow{v}_k = \overrightarrow{0}$$

Par hypothèse de récurrence et comme $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$, on a $c_i = 0$ pour tout $i \leq k$. Donc $(*)$ devient $c_{k+1} \overrightarrow{v}_{k+1} = \overrightarrow{0}$, ce qui implique $c_{k+1} = 0$. □

5.3 Diagonalisation

5.3.1 Matrices semblables

Définition 5.14 *Matrices semblables*

Deux matrices carrées A et B de même taille sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que :

$$B = P^{-1}AP \quad \text{ou de manière équivalente} \quad A = PBP^{-1}$$

Théorème 5.15 *Propriétés des matrices semblables*

Si A et B sont semblables, alors :

1. Elles ont le même polynôme caractéristique.
2. Elles ont les mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités algébriques).
3. $\det(A) = \det(B)$ et $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.
4. $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.

Démonstration. Soit $B = P^{-1}AP$ avec P inversible.

1. $p_B(\lambda) = \det(B - \lambda\mathbb{I}_n) = \det(P^{-1}(A - \lambda\mathbb{I}_n)P) = \det(A - \lambda\mathbb{I}_n) = p_A(\lambda)$
2. Découle de (1).
3. $\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(A)$.
   Pour la trace, montrons d'abord que $\text{Tr}(CD) = \text{Tr}(DC)$ pour toutes matrices C, D :
   Si $C = (c_{ij})$ et $D = (d_{ij})$, alors $(CD)_{ii} = \sum_k c_{ik}d_{ki}$ et $(DC)_{jj} = \sum_k d_{jk}c_{kj}$. Donc $\text{Tr}(CD) = \sum_i \sum_k c_{ik}d_{ki} = \sum_k \sum_i d_{ki}c_{ik} = \text{Tr}(DC)$.
   Ainsi : $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}((AP)P^{-1}) = \text{Tr}(A(PP^{-1})) = \text{Tr}(A)$.
4. $B\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow P^{-1}AP\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow A(P\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$. Comme P est inversible, $\dim(\text{Ker}(B)) = \dim(\text{Ker}(A))$, donc $\text{rang}(B) = \text{rang}(A)$.

□

Remarque importante 5.16

La réciproque est fausse : deux matrices peuvent avoir le même polynôme caractéristique sans être semblables. Par exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ont toutes deux $(1 - \lambda)^2$ comme polynôme caractéristique, mais ne sont pas semblables (car $B = \mathbb{I}_2$ et la seule matrice semblable à $\mathbb{I}_2$ est $\mathbb{I}_2$ elle-même).

5.3.2 Matrices diagonalisables

Définition 5.17 *Matrice diagonalisable*

Une matrice carrée A est dite *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale D, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que :

$$P^{-1}AP = D$$

où D est diagonale.

Le lien avec les vecteurs propres est donné par le théorème fondamental suivant :

Théorème 5.18 *Théorème de diagonalisation*

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A.
Dans ce cas, si $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ où les $\vec{v}_i$ sont des vecteurs propres linéairement indépendants associés aux valeurs propres λ_i, alors :

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons A diagonalisable. Il existe P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

Multiplions à gauche par P : $AP = PD$.

Écrivons $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Le produit matriciel donne : $AP = \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & \cdots & A\vec{v}_n \end{bmatrix}$, et $PD = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \cdots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix}$.

Donc $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$ pour tout i, donc les colonnes de P sont bien des vecteurs propres de A.

Comme P est inversible, ses colonnes sont linéairement indépendantes (Théorème 2.23), donc forment une base de $\mathbb{R}^n$.

($\Leftarrow$) La démonstration inverse suit le même raisonnement. □

Remarques 5.5.0.19. *La matrice P est une matrice de changement de base : elle transforme la base canonique en une base de vecteurs propres. Dans cette nouvelle base, l'application linéaire associée à A a une représentation diagonale très simple.*

Corollaire 5.20

Si une matrice $n \times n$ possède n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

Démonstration. D'après le théorème d'indépendance linéaire, n vecteurs propres associés à n valeurs propres distinctes forment une base de $\mathbb{R}^n$. □